MAI 1 – cvičení 12.3. – „písemné“

1. Připomenutí – minulé cvičení (5.3) jsme

   1) zopakovali a „cvičili“ definice limity posloupnosti vlastní i nevlastní na několika příkladech – t.zv. důkazy limit posloupností „z definice“

   2) zopakovali jsme větu o dvou strážnících (dále VOS) (tj. větu o limitě sevřené posloupnosti) pro vlastní limitu a pomysleli její modifikace pro limity nevlastní a pomocí těchto vět jsme „počítali“ několik limit posloupností.

2. V tomto „písemném“ cvičení

   uděláme ještě několik příkladů „teoretických“ – – cvičení definice limity a důkazů a pak budeme hlavně „počítat“ limity – ještě užití strážníků a pak hlavně budeme cvičit „aritmetiku limit“ a ukážeme si, jak se k aritmetice „lze „dostat“ od t.zv. neurčitých výrazů, tj. limit typu:

   „$\frac{\infty}{\infty}$“, „$\frac{0}{0}$“, „$0 \cdot \infty$“, $\infty - \infty$.

3. Uděláme trochu opakování a příkladů z „nekonečných řad“.

Pro výpočet limit (a využití aritmetiky limit) je užitečný „katalog“ (jak tomu „říkám“) několika základních limit, tj. limit několika důležitých posloupností:

„Tahák" (opakování – některé limity byly na minulém cvičení, některé za domácí úkol 3., něco je nové)

1) $\lim a^n = \begin{cases} +\infty, & a>1 \\ 1, & a=1 \\ 0, & |a|<1 \\ \text{neex.}, & a \le -1 \end{cases}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^k} = 0, \quad k \in \mathbb{N}$

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a>0; \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

4) srovnání „rychlosti" konvergence k nekonečnu

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^k}{a^n} = 0 \ (a>1); \quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0 \ (\text{pro } a>1),$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

5) a ještě jedna „známá" limita:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

A zde je místo pro „doplnění" Vašeho „přehledu" limit:

A nyní příklady:

I. cvičení (zase) definice limity a důkazů:

Dokažte, že platí tvrzení:

1) (a_n) je konvergentní posloupnost $\Rightarrow$ (a_n) je omezená

Dk: Chceme tedy dokázat, že když $\lim a_n = a \in \mathbb{R}$, pak existuje takové $c\ (\geq 0)$, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ je $|a_n| \leq c$.

Víme, že $\lim a_n = a$, tj. (dle definice) platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 : \quad |a_n - a| < \varepsilon$$

vezmeme (třeba) $\varepsilon = 1$; pak ex. n_0: $n > n_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad |a_n| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|$$

pak už stačí vzít $c = \max(|a_1|, \dots, |a_{n_0}|, |a|+1)$

2) (a_n) je konvergentní $\Rightarrow$ (a_n) je cauchyovská posloupnost

tj. chceme ukázat, že platí:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall m, n > n_0 : \quad |a_m - a_n| < \varepsilon \qquad (1)$$

a víme (z předpokladu), že ($\lim a_n = a \in \mathbb{R}$)

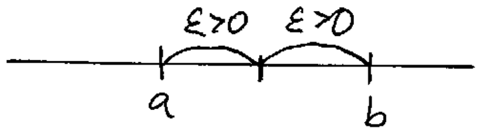
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 : \quad |a_n - a| < \varepsilon \qquad (2)$$

Zvolme tedy $\varepsilon > 0$; pak podle (2) k $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existuje n_0 tak, že $n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$; potom, zvolíme-li $m > n_0$, $n > n_0$, máme:

$$|a_m - a_n| \leq |a_m - a| + |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

(což jsme měli ukázat)

3) nechť $\lim a_n = a \in R$, $\lim b_n = b \in R$, a nechť $a < b$;
pak ex. n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n < b_n$.



zvolme „například" $\varepsilon = \frac{b-a}{2}$ (>0);
pak (z definice limity) k „našemu" ε

(1) $\exists n_1 \ \forall n > n_1 : \ |a_n - a| < \frac{b-a}{2}$, tj. $a_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$

(2) $\exists n_2 \ \forall n > n_2 : \ |b_n - b| < \frac{b-a}{2}$, tj. $b - \frac{b-a}{2} < b_n$
$\left(= \frac{b+a}{2} \right)$

tj. pro $n > n_0$ $(= \max\{n_1, n_2\})$ platí (1) i (2), tj.
$$a_n < \frac{a+b}{2} < b_n$$ (což je „naše" tvrzení)

II. „Počítání" limit

(za zadání limity (a_n) je „zabar" situace v úvozovkách, tj. třeba $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} =$ „$\frac{\infty}{\infty}$" a pak se snažíme sledovat, jak se od neurčitých výrazů (tedy „výsledek" není definován) lze „dostat" k aritmetice limit a užít „třeba vhodné" věcí „takové")

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3+1} =$ „$\frac{1}{\infty}$" $= 0$ (aritmetika – snadné)

$\left(\lim\limits_{n\to\infty} (n^3+1) = \text{„}\infty + 1\text{"} = \infty \right.$ – aritmetika$\left.\right)$

2. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n+1}} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)} \underset{AL}{=} \underline{1}$ $\left(\lim \frac{1}{n} = 0\right)$

zde vede „občas" k cíli srovnání nekonečen, tj. „rychlostí", jakou jdou čitatel, resp. jmenovatel, do ∞" – technicky – vytkneme z čitatele (i jmenovatele) nejvyšší mocninu n

(AL – zkratka pro „užití aritmetiky limit")

3. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-1}{2n^2-n+5}} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim \frac{\cancel{n^2}\left(1+\frac{2}{n}-\frac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n^2}\left(2-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)} \underset{AL}{=} \underline{\frac{1}{2}}$

(analogicky k 2.)

(neboť $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$)

4. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+n-14}{2n^2-n+5}} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^{\cancel{3}}\left(1+\frac{1}{n^2}-\frac{14}{n^3}\right)}{\cancel{n^2}\left(2-\frac{1}{n}+\frac{5}{n^2}\right)} =$

(a celkově výsledek ∞ – neboť $\sim \frac{n^3}{n^2}$)

$= „\infty \cdot \frac{1}{2}" \underset{AL}{=} \underline{\infty}$

5. $\underline{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n^3-3n+1}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim \frac{\cancel{n^2}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{n^{\cancel{3}}\left(2-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}\right)} =$

(celkově $=0$, neboť $\sim \frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n}$)

$= „\frac{1}{\infty \cdot 2}" = \underline{0}$ (AL)

6. <u>A nyní trochu „jiná" ∞ !</u>

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n-2^n}{4^n+3^{n+1}} = \lim \frac{3^n\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}{4^n\left(1+\left(\frac{3}{4}\right)^n\cdot 3\right)} = \lim \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(1+3\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)}$

(neboť $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$ pro $|a|<1$, zde $a=\frac{3}{4}$ nebo $a=\frac{2}{3}$)

$= 0$ (AL + „takové")

7. $$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + n!}{-2^n + 3.n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3^n}{n!} + 1\right)\cancel{n!}}{\left(\frac{-2^n}{n!} + 3\right)\cancel{n!}} = \frac{1}{3} \quad \text{(AL + tabulka)}$$

zde je „nejrychlejší" $n!$

(a z „tabulky" víme, že $\lim_{n\to\infty} \frac{3^n}{n!} = 0$, $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$)

8. <u>a „horší" příklad:</u>

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3^n + (-1)^n n!}{-2^n + 3.n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^n}{n!} + (-1)^n}{\frac{-2^n}{n!} + 3}$$ – tato limita neexistuje

(stejná „úprava" jako v 7.)

(Lépe – získaná posloupnost limitu nemá – neboť

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{2n}}{\frac{-2^{2n}}{(2n)!} + 3} = \frac{1}{3},$$ analogicky limita

lichých členů posloupnosti $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{2n+1}}{(2n+1)!} + (-1)^{2n+1}}{\frac{-2^{2n+1}}{(2n+1)!} + 3} = -\frac{1}{3},$$

tedy dle věty o limitě vybrané posloupnosti (podposloupnosti) posloupnost „původní" limitu nemá.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = „\infty - \infty"$ (=„vyjádření" „neurčitá")

postupem analogickým k předchozím příkladům se „k cíli" nedostaneme:

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\tfrac{1}{n}} - 1\right) \underset{teď}{=} „\infty \cdot 0" \text{ – opět „nejasno"}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1+\frac{1}{n}} = 1$ (zkuste „dokázat", ale asi je „zřejmé")

Tady „užije se známý trik": („usměrnění" (povolené) rozdílu)

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \quad (a>0, b>0)$$

$$= \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

(„přidejte si na „tabuli")

Zde:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = „\frac{1}{\infty}" = 0$$

(asi jste slyšeli „čekali" tento výsledek, neboť pro n „blízko" ∞ je asi rozdíl mezi „n+1" a „n" blízký 0!)

ale 10) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right) = „\infty-\infty" =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n^2}+n+1-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = „\frac{\infty}{\infty}" = \lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\cancel{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}+1\right)} = \frac{1}{2}$$

$\left(\lim \frac{1}{n} = \lim \frac{1}{n^2} = 0\right)$ (a AL)

Podobně

11) $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) =_{"} \infty(\infty-\infty)" =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n\,(n^2+1-n^2)}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n} = \lim \frac{n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1\right)} =$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

M) <u>A ještě jedna náležitá aplikace věty o strážnících:</u>

<u>Věta</u>: (i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

$\left((a_n)\text{ je daná posloupnost}\right)$

(ii) nechť $a_n > 0$, $\lim \sqrt[n]{a_n} = a > 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$

(ii) plyne stejně jako dle 4)

<u>Dk (i)</u>: Je-li $(0\le) a < 1$, zvolme $a < q < 1$; pak (z definice limity) ex. $n_0 \in N$ tak, že pro $n > n_0$ je

$\sqrt[n]{|a_n|} < q < 1$ (volili jsme $\varepsilon = \underset{>0}{q-a}$);

pak tedy $0 \le |a_n| < q^n$, a $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ $(\underset{+1}{q} < 1) \Rightarrow$

$\underset{VOS}{\Longrightarrow}$ $\lim |a_n| = 0$ (což jsme měli ukázat)

A pak jednoduše lze ukázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{b^n} = 0$ pro $b > 1$ a $k \in N$:

$$\lim \sqrt[n]{\frac{n^k}{b^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^k}{b} = \frac{1}{b} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{b^n} = 0$$

$$\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1 \text{ (T)}\right)$$

III. A „trochu" o nekonečných řadách (přednášky v mé minulém týdnu)

Je-li dána posloupnost (a_n), pak symbolem $\sum_1^\infty a_n$ (název – nekonečná řada) rozumíme limitu t.zv. částečných součtů, tj. $\lim_{n\to\infty} \sum_1^n a_k \ (= \lim_{n\to\infty} s_n)$

A říkáme, že $\sum_1^\infty a_n$ konverguje, je-li $\lim_{n\to\infty} s_n = s \in R$ (pak píšeme „$\sum_1^\infty a_n = s$"), jinak říkáme, že $\sum_1^\infty a_n$ diverguje (tj. je-li $\lim_{n\to\infty} s_n = \pm\infty$, nebo (s_n) limitu nemá)

(O nekonečných řadách není na přednášce se nemluvilo, proto jen „něco málo" příkladů).

Příklady:

1) geometrická řada $\sum_{n=0}^\infty q^n$ (zde $q^0 = 1$, $q \in R$)

(Věta) $\sum_0^\infty q^n$ konverguje $\Leftrightarrow |q| < 1$; a pro $|q|<1$ je $\sum_0^\infty q^n = \frac{1}{1-q}$.

a) $q = 1$: $s_n = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n\times} = n$, $\lim s_n = \lim n = +\infty$, tedy řada diverguje

b) $q \neq 1$, pak lze ukázat, že

$$(*) \qquad S_{n+1} = 1 + q + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

a tedy ($\lim_{n\to\infty} q^{n+1}$ známe") $\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}$ pro $|q|<1$,

pro $q>1$ je $\lim S_n = +\infty$, pro $q \leq -1$ (S_n) limitu nemá (opět užitím vybraných posloupností sudých, resp. lichých členů (S_n))

(*) si ukažte důkazem matematickou indukcí nebo lze i takto:

$$S_{n+1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^n \quad | \cdot q \neq 0 \ (\text{pro } q=0 \text{ zřejmé})$$

$$q S_{n+1} = q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n+1}$$

a odtud: $S_{n+1}(1-q) = 1 - q^{n+1} \underset{q\neq 1}{\Longrightarrow} S_{n+1} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

2) (důležitá) <u>podmínka nutná</u> konvergence řady $\sum a_n$:

$$\sum_1^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Rightarrow \lim a_n = 0$$

<u>Dk.</u> $\sum a_n$ konverguje $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = s \in \mathbb{R}$; pak

$a_n = S_n - S_{n-1}$, a $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = s$ (zřejmé),

tedy (AL) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = s - s = 0$

a odtud tedy hned: $\sum_{1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-1}$ diverguje $\left(\lim \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} \right)$

Ale máme ukázat na cvičení (nebo od přednášejících), že t.zv. <u>harmonická řada</u> $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ <u>diverguje</u>

(tedy vidíte, že $\lim a_n = 0$ není postačující pro konvergenci řady $\sum a_n$) !

<u>Důkaz divergence</u> $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$:

označme $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ částečný součet prvních n členů,

a ukážeme, že posloupnost (s_n) není cauchyovská (tedy nemůže být konvergentní – viz příklad I/2)

připomeneme: (a_n) je cauchyovská posloupnost, když platí:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \forall m > n_0 : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon \qquad (*)$

vezměme $s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$!

tedy zde <u>existuje</u> $\varepsilon = \frac{1}{2}\ (>0)$ tak, že pro lib. $n \in N$ lze zvolit $\bar{m} = n+1$, $\bar{n} = 2\bar{m}$ a pak $\bar{m}, \bar{n} > n$ ale

$|s_{\bar{m}} - s_{\bar{n}}| = |s_{2\bar{m}} - s_{\bar{m}}| > \frac{1}{2}$, což znamená,

že neplatí (*), tj. (s_n) není cauchyovská, tedy $\sum \frac{1}{n}$ diverguje.

3) Ukážeme několik problémů a příkladů k řadám :

Ukažme, že platí:

je-li $a_n \geqq 0$, pak $\sum_1^\infty a_n$ konverguje nebo diverguje (k $+\infty$).

Dk. 1) posloupnost částečných součtů řady $\sum_1^\infty a_n$ je neklesající, neboť:

$$s_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geqq s_n$$
$$(a_{n+1} \geqq 0)$$

2) tedy, dle věty o limitě monotónní posloupnosti má (s_n) limitu, a

(i) $\lim s_n = s \in \mathbb{R}$, je-li (s_n) shora omezená, nebo

(ii) $\lim s_n = +\infty$, není-li (s_n) shora omezená.

A odtud důležité kritérium pro konvergenci řad (t.zv. srovnávací):

je-li 1) $0 \leq a_n \leq b_n$ pro $\forall n \in \mathbb{N}$ (stačí pro $n \geqq n_0$)

2) $\sum_1^\infty b_n$ konverguje ;

Potom konverguje i $\sum a_n$.

(a ekvivalentně: když $\sum a_n$ diverguje, pak i $\sum b_n$ diverguje)

Opět dokažme jako příklad na užití vlastností monotónních posloupností :

Označme $S_n = a_1+a_2+\dots+a_n$; $\sigma_n = b_1+b_2+\dots+b_n$;

Pak pro $\forall n$ (díky předpokladu (1)) je $S_n \le \sigma_n$
a díky (2) je $\{\sigma_n\}$ omezená posloupnost, tedy
$\exists\, c$ takové, že $0 \le \sigma_n \le c$, tedy i $0 \le S_n \le \sigma_n \le c$,
(S_n) je neklesající, tedy (dle věty o limitě monotónní posloupnosti) je (S_n) konvergentní posloupnost.

<u>A užití srovnávacího kritéria</u> :

1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$ je konvergentní řada, neboť

(1) $0 < \frac{1}{n\,3^n} \le \frac{1}{3^n}$ a

(2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ konverguje (geom. řada, $q = \frac{1}{3}$)

2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!}$ konverguje, neboť $\frac{1}{n!} \le \frac{1}{2^{n-1}}$, $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ konv.

A na závěr: Sečtěte řadu $\sum_{2}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$, kde $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$:

$S_n = a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + \dots + a_n - a_{n-1} = a_n - a_1$,

tedy $\lim S_n = \lim(a_n - a_1) \underset{AL}{=} a - a_1$

<u>zkuste pro</u> $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$: